I.E.S. Gonzalo Nazareno

CONTROL DE GEOMETRÍA – 2º BACH. CIENCIAS NATURALEZA Y SALUD
29 ABRIL 2003

1.- Dados los vectores $\vec{v}\,(2\,,-1\,,6)$ y $\vec{w}\,(-1\,,5\,,a)$

a) Halla el valor del parámetro *a* para que sean perpendiculares.
b) Halla el valor del parámetro *a* para que sean paralelos.
c) Halla el área del triángulo determinado por los dos vectores para a = -3.

(3 puntos)

2.- Dadas las rectas $\begin{cases} r \to x-1 = y+2 = z \\ t \to \dfrac{2-x}{-3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+1}{6} \end{cases}$

a) Estudia su posición relativa.
b) Halla el ángulo que forman un vector de la recta *r* con un vector de la recta *t*.

(2 puntos)

3.- Dados $\begin{cases} r \to \begin{cases} x-y=1 \\ 2x+3y-5z=-16 \end{cases} \\ \boldsymbol{p} \to x+my-z=0 \end{cases}$

a) Estudia, según los valores del parámetro m, sus posiciones relativas.
b) ¿Hay algún valor de m para el que r y $\boldsymbol{p}$ sean perpendiculares?
c) Halla el punto de corte entre r y $\boldsymbol{p}$ en el caso en que el plano dado pase por el punto A (2 , 1 , 4).

(3 puntos)

4.- Dados los puntos P (1 , 0 , 0) y Q (0 , -1 , 5) y la recta $r \to \begin{cases} 2x-y-z+3=0 \\ -2x+3y-z-1=0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación paramétrica de r.
b) Halla el punto R de r tal que $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PR}$.

(2 puntos)

SOLUCIONES

1) a)Para que sean perpendiculares el producto escalar debe ser 0. $(2,-1,6)\cdot(-1,5,a) = -2-5+6a = 0 \rightarrow a = 7/6$

b) Para que sean paralelos los vectores deben ser proporcionales. $\vec{v} = b\vec{u} \rightarrow (2,-1,6) = b(-1,5,a) \rightarrow \begin{cases} 2=-b \\ -1=5b \\ 6=ba \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=-2 \\ b=-1/5 \\ \textbf{IMPOSIBLE} \end{cases}$

c) $\vec{v}x\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \right) = (-27,0,9) \rightarrow |\vec{v}x\vec{w}| = \sqrt{(-27)^2+9^2} = \sqrt{810}$, por lo tanto el área del triángulo es: $\frac{\sqrt{810}}{2}\,\mathbf{u^2}$

2) a) Para estudiar la posición relativa hay que resolver el sistema de ecuaciones entre r y t.

$r: \begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t; \\ z=t \end{cases} \quad t: \begin{cases} x=2+3t \\ y=4t \\ z=-1+6t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+t=2+3t' \\ -2+t=4t' \\ t=-1+6t' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t-3t'=1 \\ t-4t'=2 \\ t-6t'=-1 \end{cases} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & 2 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3$ Sistema incompatible y como los vectores directores de r, $\vec{d_r} = (1,1,1)$, y t, $\vec{d_t} = (3,4,6)$, no son paralelos (proporcionales), las rectas **se cruzan**.

b) $\vec{d_r} = (1,1,1) \rightarrow |\vec{d_r}| = \sqrt{3}; \quad \vec{d_t} = (3,4,6) \rightarrow |\vec{d_r}| = \sqrt{9+16+36} = \sqrt{61}; \quad \vec{d_r}\cdot\vec{d_t} = 3+4+6 = 13 \rightarrow$

$\rightarrow \cos(\vec{d_r},\vec{d_t}) = \frac{13}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{61}} \rightarrow$ **16º3´25´´**

3) a) Para estudiar la posición relativa hay que resolver el sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+3y-5z=-16 \\ x+my-z=0 \end{cases}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & -5 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = 5m$

a.1) Si m≠ 0, rg(A) = rg(A´) = nº incógnitas = 3, Sistema compatible determinado, la recta y el plano **se cortan en un punto**.

a.2) Si m = 0, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -16 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, rg(A) = 2 ≠ rg(A´) = 3, Sistema incompatible. La recta y el plano son **paralelos**.

b) $\overrightarrow{d_r} = (1,-1,0)x(2,3,-5) = (5,5,5)$ debe ser paralelo al vector perpendicular al plano $\vec{n} = (1,m,-1)$ y por lo tanto proporcionales, $(5,5,5) = a(1,m,-1) \rightarrow \begin{cases} 5 = a \\ 5 = am \\ 5 = -a \end{cases}$ **IMPOSIBLE**.

4) a)

$\begin{cases} 2x - y - z + 3 = 0 \\ -2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & -\mathbf{1} & -3 \\ -\mathbf{2} & 3 & -\mathbf{1} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow rg(A) = rg(A') = 2 <$ nº incógnitas $= 3 \rightarrow$
Sistema compatible indeterminado.

$\begin{cases} 2x - z = -3 + y \\ -2x - z = 1 - 3y \end{cases}$ Sumando, $z = 1 + y$, $\begin{cases} 2x - z = -3 + y \\ 2x + z = -1 + 3y \end{cases}$ Sumando, $x = -1 + y \rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-1,-1,5)$; $R = (-1 + t, t, 1 + t)$; $\overrightarrow{PR} = (-2 + t, t, 1 + t)$, para que sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser 0. $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$, 2 – t – t + 5 + 5t = 0, t = -7/3, R=(-1-7/3, -7/3, 1-7/3)
R = (-10/3, -7/3, -4/3).